

# The effective Vlasov-Poisson system for strongly magnetized plasmas

## Le système de Vlasov-Poisson effectif pour les plasmas fortement magnétisés

Mihai BOSTAN<sup>a</sup> Aurélie FINOT<sup>a</sup> Maxime HAURAY<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institut de Mathématiques de Marseille I2M, Centre de Mathématiques et Informatique CMI, UMR CNRS 7373, 39 rue Frédéric Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13 France*

---

### Résumé

Nous étudions le régime du rayon de Larmor fini pour le système de Vlasov-Poisson, dans le cas où la longueur de Debye est égale au rayon de Larmor. Le champ magnétique est supposé uniforme. Nous restreignons l'étude de ce problème non linéaire au cas bi-dimensionnel. Nous obtenons le modèle limite en appliquant les méthodes de gyro-moyenne cf. [1], [2]. Nous donnons l'expression explicite du champ d'advection effectif de l'équation de Vlasov, dans laquelle nous avons substitué le champ électrique auto-consistant, via la résolution de l'équation de Poisson moyennée à l'échelle cyclotronique. Nous mettons en évidence la structure hamiltonienne du modèle limite et présentons ses propriétés : conservations de la masse, de l'énergie cinétique, de l'énergie électrique, etc.

### Abstract

We study the finite Larmor radius regime for the Vlasov-Poisson system. The magnetic field is assumed to be uniform. We investigate this non linear problem in the two dimensional setting. We derive the limit model by appealing to gyro-average methods cf. [1], [2]. We indicate the explicit expression of the effective advection field, entering the Vlasov equation, after substituting the self-consistent electric field, obtained by the resolution of the averaged (with respect to the cyclotronic time scale) Poisson equation. We emphasize the Hamiltonian structure of the limit model and present its properties : conservatons of the mass, kinetic energy, electric energy, etc.

---



---

*Email addresses:* [mihai.bostan@univ-amu.fr](mailto:mihai.bostan@univ-amu.fr) (Mihai BOSTAN), [aurelie.finot@univ-amu.fr](mailto:aurelie.finot@univ-amu.fr) (Aurélie FINOT), [maxime.hauray@univ-amu.fr](mailto:maxime.hauray@univ-amu.fr) (Maxime HAURAY).

## Abridged English version

Motivated by the magnetic confinement fusion, which is one of the main application in plasma physics, we analyse the dynamics of a population of charged particles, under the action of a strong uniform magnetic field. The goal of this note is to study the finite Larmor radius regime, that is, we assume that the particle distribution fluctuates at the Larmor radius scale along the orthogonal directions, with respect to the magnetic field [5], [6], [7]. To simplify, we consider the two dimensional setting, *i.e.*,  $x = (x_1, x_2), v = (v_1, v_2)$ , with a magnetic field orthogonal to  $x_1 O x_2$ . We chose a regime such that

- (i) The reference time  $T$  is much larger than the cyclotronic period (strong magnetic field) *i.e.*,

$$T \frac{q|B^\varepsilon|}{m} \approx \frac{1}{\varepsilon}, \text{ with } 0 < \varepsilon \ll 1; \quad (1)$$

Notice that the above hypothesis writes also  $\frac{TV}{\rho_L} \approx \frac{1}{\varepsilon}$ , where  $V$  is the reference velocity (along the orthogonal directions), and  $\rho_L$  is the typical Larmor radius.

- (ii) The kinetic energy is much larger than the potential energy

$$\frac{m|V|^2}{q\phi} \approx \frac{1}{\varepsilon} \quad (2)$$

where  $m$  is the particle mass,  $q$  is the particle charge, and  $\phi$  is the reference electric potential.

- (iii) The Larmor radius is of the same order as the Debye length *i.e.*,

$$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 \phi}{nq} \approx \rho_L^2. \quad (3)$$

Here  $\varepsilon_0$  is the electric permittivity of the vacuum and  $n$  is the charge concentration.

Accordingly, the presence density  $f^\varepsilon = f^\varepsilon(t, x, v)$  and the electric potential  $\phi^\varepsilon$  satisfy the following Vlasov-Poisson system, up to some multiplicative constants, of order one

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \omega_c {}^\perp v \cdot \nabla_v f^\varepsilon) - \nabla_x \phi^\varepsilon \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

$$-\Delta_x \phi^\varepsilon = \rho^\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^2} f^\varepsilon(t, x, v) dv, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

$$f^\varepsilon(0, x, v) = f^{\text{in}}(x, v), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Here  $\omega_c$  stands for the rescaled cyclotronic frequency (the real cyclotronic frequency is  $\omega_c^\varepsilon = \omega_c/\varepsilon$ , and the real cyclotronic period is  $T_c^\varepsilon = \frac{2\pi}{\omega_c^\varepsilon} = \varepsilon \frac{2\pi}{\omega_c} = \varepsilon T_c$ ), and it is assumed constant (uniform magnetic field). For any  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , we denote by  ${}^\perp v$  the vector  ${}^\perp v = (v_2, -v_1) \in \mathbb{R}^2$ . We study the stability of the family  $(f^\varepsilon, \phi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , when  $\varepsilon$  becomes small. The asymptotic behavior follows by filtering out the fast oscillations of the characteristic equations for (4). It is easily seen that the changes over one cyclotronic period of the quantities  $\tilde{x} = x + \frac{{}^\perp v}{\omega_c}$ ,  $\tilde{v} = \mathcal{R}(\omega_c t/\varepsilon)v$ , are negligible. We expect that the family  $\tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{x}, \tilde{v}) = f^\varepsilon(t, \tilde{x} - \mathcal{R}(-\omega_c t/\varepsilon) {}^\perp \tilde{v}/\omega_c, \mathcal{R}(-\omega_c t/\varepsilon)\tilde{v})$  converges, as  $\varepsilon$  becomes small, toward some profile  $\tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v})$ .

**Théorème 0.1** *Let  $f^{\text{in}} = f^{\text{in}}(x, v)$  be a non negative, smooth, compactly supported presence density and  $(f^\varepsilon, \phi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  be the solutions of the Vlasov-Poisson sistem (4), (5), (6). We denote by  $\tilde{f} = \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v})$  the solution of*

$$\partial_t \tilde{f} + \mathcal{V}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f} + \mathcal{A}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f} = 0, \quad (t, \tilde{x}, \tilde{v}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (7)$$

with the initial condition

$$\tilde{f}(0, \tilde{x}, \tilde{v}) = f^{\text{in}} \left( \tilde{x} - \frac{\perp \tilde{v}}{\omega_c}, \tilde{v} \right), \quad (\tilde{x}, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (8)$$

where the velocity and acceleration vector fields  $\mathcal{V}, \mathcal{A}$  are given by

$$\mathcal{V}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) = -\frac{\perp \nabla_{\tilde{x}}}{\omega_c} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)], \quad \mathcal{A}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) = \omega_c \perp \nabla_{\tilde{v}} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)]$$

$$\tilde{\phi}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \ln \frac{|\tilde{v} - \tilde{w}|}{|\omega_c|} \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq \frac{|\tilde{v} - \tilde{w}|}{|\omega_c|}\}} + \ln |\tilde{x} - \tilde{y}| \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| > \frac{|\tilde{v} - \tilde{w}|}{|\omega_c|}\}} \right\} \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y}.$$

Therefore  $f^\varepsilon(t, x, v) - \tilde{f}(t, x + \perp v / \omega_c, \mathcal{R}(\omega_c t / \varepsilon) v) = o(1)$  when  $\varepsilon \searrow 0$ .

## 1. Trajectoires effectives

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la modélisation des plasmas de fusion. Nous concentrons notre étude au régime du rayon de Larmor fini pour le système de Vlasov-Poisson bi-dimensionnel. Sous les hypothèses (1), (2), (3), ce régime est décrit par (4), (5), (6). La méthode développée ici consiste à exprimer le potentiel électrique à l'aide de la solution fondamentale de l'opérateur de Laplace dans  $\mathbb{R}^2$ , puis insérer cette expression dans les trajectoires de l'équation de Vlasov. Nous obtenons alors, à l'aide des méthodes classiques de gyro-moyenne [1], [2], [3] les trajectoires limites et ainsi, les expressions effectives des champs vitesse et accélération de la nouvelle équation de Vlasov, décrivant le régime asymptotique considéré. Pour plus de détails sur les preuves de ces résultats, nous renvoyons à [4].

Notons  $e$  la solution fondamentale de l'opérateur de Laplace dans  $\mathbb{R}^2$

$$e(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln |z|, \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

c'est-à-dire  $-\Delta e = \delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Le potentiel électrique, solution de l'équation de Poisson (5), s'écrit donc

$$\phi^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} e(x - y) \rho^\varepsilon(t, y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e(x - y) f^\varepsilon(t, y, w) \, dw dy. \quad (9)$$

Les équations caractéristiques de l'équation de transport (4) sont données par

$$\frac{dX^\varepsilon}{dt} = \frac{V^\varepsilon(t)}{\varepsilon}, \quad \frac{dV^\varepsilon}{dt} = \omega_c \frac{\perp V^\varepsilon(t)}{\varepsilon} - \nabla_x \phi^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t)), \quad (X^\varepsilon(0), V^\varepsilon(0)) = (x, v).$$

Nous cherchons des quantités qui varient peu sur une période cyclotronique. Plus exactement, à tout instant fixé  $t > 0$ , on introduit le changement de coordonnées

$$\tilde{x} = x + \frac{\perp v}{\omega_c}, \quad \tilde{v} = \mathcal{R} \left( \frac{\omega_c t}{\varepsilon} \right) v$$

où  $\mathcal{R}(\theta)$  désigne la rotation de  $\mathbb{R}^2$  d'angle  $\theta$ . On vérifie aisément que le déterminant jacobien vaut 1 et alors ces transformations préservent la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^4$  i.e.,  $d\tilde{v} d\tilde{x} = dv dx$ . En effet,  $\tilde{x}$  est le centre du cercle de Larmor d'écrit par une particule passant par  $x$  avec la vitesse  $v$ . Ce centre ne varie pas à l'échelle du mouvement rapide cyclotronique, correspondant à la fréquence cyclotronique  $\frac{\omega_c}{\varepsilon}$ . Plus exactement on a

$$\frac{d\tilde{X}^\varepsilon}{dt} = -\frac{\perp \nabla_x \phi^\varepsilon}{\omega_c}(t, X^\varepsilon(t)) = -\frac{\perp \nabla_x \phi^\varepsilon}{\omega_c} \left( t, \tilde{X}^\varepsilon(t) - \frac{\mathcal{R}}{\omega_c} \left( -\frac{\omega_c t}{\varepsilon} \right) \perp \tilde{V}^\varepsilon(t) \right) \quad (10)$$

$$\frac{d\tilde{V}^\varepsilon}{dt} = -\mathcal{R}\left(\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right) \nabla_x \phi^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t)) = -\mathcal{R}\left(\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right) \nabla_x \phi^\varepsilon\left(t, \tilde{X}^\varepsilon(t) - \frac{\mathcal{R}}{\omega_c}\left(-\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right)^\perp \tilde{V}^\varepsilon(t)\right). \quad (11)$$

On souhaite remplacer le potentiel électrique par l'expression de (9). On introduit les densités de présence en les coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{v})$

$$f^\varepsilon(t, x, v) = \tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{x}, \tilde{v}), \quad \tilde{x} = x + \frac{\perp v}{\omega_c}, \quad \tilde{v} = \mathcal{R}\left(\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right) v.$$

Ainsi, (9) conduit à

$$\phi^\varepsilon\left(t, \tilde{X}^\varepsilon(t) - \frac{\mathcal{R}}{\omega_c}\left(-\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right)^\perp \tilde{V}^\varepsilon(t)\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e\left(\tilde{X}^\varepsilon(t) - \tilde{y} - \frac{\mathcal{R}}{\omega_c}\left(-\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right)^\perp (\tilde{V}^\varepsilon(t) - \tilde{w})\right) \tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y}$$

et par conséquent, (10), (11) deviennent

$$\frac{d\tilde{X}^\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\omega_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \perp \nabla e\left(\tilde{X}^\varepsilon(t) - \tilde{y} - \frac{1}{\omega_c} \mathcal{R}\left(-\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right)^\perp (\tilde{V}^\varepsilon(t) - \tilde{w})\right) \tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{V}^\varepsilon}{dt} = -\mathcal{R}\left(\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla e\left(\tilde{X}^\varepsilon(t) - \tilde{y} - \frac{1}{\omega_c} \mathcal{R}\left(-\frac{\omega_c t}{\varepsilon}\right)^\perp (\tilde{V}^\varepsilon(t) - \tilde{w})\right) \tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y}. \quad (13)$$

En prenant la moyenne de (12) sur la période cyclotronique  $[t, t + T_c^\varepsilon]$ , avec  $T_c^\varepsilon = \varepsilon \frac{2\pi}{\omega_c}$ , et en introduisant la variable rapide  $s = (\tau - t)/\varepsilon$ ,  $\tau \in [t, t + T_c^\varepsilon]$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{X}^\varepsilon(t + T_c^\varepsilon) - \tilde{X}^\varepsilon(t)}{T_c^\varepsilon} &= -\frac{1}{\omega_c T_c^\varepsilon} \int_t^{t+T_c^\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \perp \nabla e\left(\tilde{X}^\varepsilon(\tau) - \tilde{y} - \mathcal{R}\left(-\frac{\omega_c \tau}{\varepsilon}\right)^\perp \frac{(\tilde{V}^\varepsilon(\tau) - \tilde{w})}{\omega_c}\right) \tilde{f}^\varepsilon(\tau) \, d\tilde{w} d\tilde{y} d\tau \\ &= -\frac{1}{\omega_c T_c} \int_0^{T_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \perp \nabla e\left(\tilde{X}^\varepsilon(t + \varepsilon s) - \tilde{y} - \mathcal{R}\left(-\frac{\omega_c t}{\varepsilon} - \omega_c s\right)^\perp \frac{(\tilde{V}^\varepsilon(t + \varepsilon s) - \tilde{w})}{\omega_c}\right) \tilde{f}^\varepsilon(t + \varepsilon s) \, d\tilde{w} d\tilde{y} ds \\ &\approx -\frac{\perp \nabla \xi}{\omega_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{X}^\varepsilon(t) - \tilde{y}, \tilde{V}^\varepsilon(t) - \tilde{w}) \tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

où la fonction  $\mathcal{E}$  est définie par

$$\mathcal{E}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e\left(\xi - \omega_c^{-1} \mathcal{R}(\theta)^\perp \eta\right) \, d\theta, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Nous procédons de la manière identique pour obtenir, à partir de (13)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}^\varepsilon(t + T_c^\varepsilon) - \tilde{V}^\varepsilon(t)}{T_c^\varepsilon} &= -\frac{1}{T_c^\varepsilon} \int_t^{t+T_c^\varepsilon} \mathcal{R}\left(\frac{\omega_c \tau}{\varepsilon}\right) \int \nabla e\left(\tilde{X}^\varepsilon(\tau) - \tilde{y} - \mathcal{R}\left(-\frac{\omega_c \tau}{\varepsilon}\right)^\perp \frac{(\tilde{V}^\varepsilon(\tau) - \tilde{w})}{\omega_c}\right) \tilde{f}^\varepsilon(\tau) \, d\tilde{w} d\tilde{y} d\tau \\ &= -\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \mathcal{R}\left(\frac{\omega_c t}{\varepsilon} + \omega_c s\right) \int \nabla e\left(\tilde{X}^\varepsilon(t + \varepsilon s) - \tilde{y} - \mathcal{R}\left(-\frac{\omega_c t}{\varepsilon} - \omega_c s\right)^\perp \frac{(\tilde{V}^\varepsilon(t + \varepsilon s) - \tilde{w})}{\omega_c}\right) \tilde{f}^\varepsilon(t + \varepsilon s) \, d\tilde{w} d\tilde{y} ds \\ &\approx \omega_c \perp \nabla_\eta \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{X}^\varepsilon(t) - \tilde{y}, \tilde{V}^\varepsilon(t) - \tilde{w}) \tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

En passant à la limite dans (14), (15), quand  $\varepsilon \searrow 0$ , nous obtenons les trajectoires après filtration du mouvement rapide cyclotronique

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = -\frac{\perp \nabla \xi}{\omega_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{X}(t) - \tilde{y}, \tilde{V}(t) - \tilde{w}) \tilde{f}(t) \, d\tilde{w} d\tilde{y}, \quad \frac{d\tilde{V}}{dt} = \omega_c \perp \nabla_\eta \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{X}(t) - \tilde{y}, \tilde{V}(t) - \tilde{w}) \tilde{f}(t) \, d\tilde{w} d\tilde{y}$$

où  $\tilde{f} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{f}^\varepsilon$  est la distribution limite. Par la suite nous déterminons une expression pour  $\mathcal{E}(\xi, \eta)$ . Cela résulte de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques. En effet, si  $|\xi| > |\eta|/|\omega_c|$ , la

fonction  $z \rightarrow e(z)$  est harmonique dans l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , contenant le disque fermé, de centre  $\xi$  et de rayon  $|\eta|/|\omega_c|$ , et par conséquent nous avons, grâce à la formule de la moyenne

$$\mathcal{E}(\xi, \eta) = e(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\xi|, \quad |\xi| > \frac{|\eta|}{|\omega_c|}.$$

Plus exactement, on démontre cf. [4]

**Lemme 1.1** *Pour tout  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ , nous avons*

$$\mathcal{E}(\xi, \eta) = e\left(\frac{\eta}{\omega_c}\right) \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq |\eta|/|\omega_c|\}} + e(\xi) \mathbf{1}_{\{|\xi| > |\eta|/|\omega_c|\}}$$

$$\nabla_\xi \mathcal{E}(\xi, \eta) = \nabla e(\xi) \mathbf{1}_{\{|\xi| > |\eta|/|\omega_c|\}}, \quad \nabla_\eta \mathcal{E}(\xi, \eta) = \omega_c^{-1} \nabla e\left(\frac{\eta}{\omega_c}\right) \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq |\eta|/|\omega_c|\}} \quad \text{au sens des distributions.}$$

## 2. Le modèle limite

Nous introduisons le potentiel électrique

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{v} - \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ e\left(\frac{\tilde{v} - \tilde{w}}{\omega_c}\right) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq |\tilde{v} - \tilde{w}|/|\omega_c|\}} + e(\tilde{x} - \tilde{y}) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| > |\tilde{v} - \tilde{w}|/|\omega_c|\}} \right\} \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} \end{aligned}$$

et les fonctions

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) &= -\frac{{}^\perp \nabla_\xi}{\omega_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{v} - \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} = -\frac{{}^\perp \nabla_{\tilde{x}}}{\omega_c} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)] \\ \mathcal{A}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) &= \omega_c {}^\perp \nabla_\eta \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{v} - \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} = \omega_c {}^\perp \nabla_{\tilde{v}} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)]. \end{aligned}$$

En dérivant sous le signe intégral, il est également possible de représenter les champs vitesse et accélération sous la forme (cf. Lemme 1.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) &= -\frac{1}{\omega_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} {}^\perp \nabla_\xi \mathcal{E}(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{v} - \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} \\ &= -\frac{1}{\omega_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} {}^\perp \nabla e(\tilde{x} - \tilde{y}) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| > |\tilde{v} - \tilde{w}|/|\omega_c|\}} \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) &= \omega_c \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} {}^\perp \nabla_\eta \mathcal{E}(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{v} - \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y} \\ &= \omega_c \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} {}^\perp \nabla e\left(\frac{\tilde{v} - \tilde{w}}{\omega_c}\right) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq |\tilde{v} - \tilde{w}|/|\omega_c|\}} \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \, d\tilde{w} d\tilde{y}. \end{aligned} \tag{17}$$

Les trajectoires limites sont déterminées par les champs vitesse et accélération  $\mathcal{V}[\tilde{f}]$ ,  $\mathcal{A}[\tilde{f}]$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \mathcal{V}[\tilde{f}(t)](\tilde{X}(t), \tilde{V}(t)), \quad \frac{d\tilde{V}}{dt} = \mathcal{A}[\tilde{f}(t)](\tilde{X}(t), \tilde{V}(t)).$$

Les densités de présence étant conservées le long des trajectoires, nous obtenons

$$\tilde{f}^\varepsilon(t, \tilde{X}^\varepsilon(t), \tilde{V}^\varepsilon(t)) = f^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t), V^\varepsilon(t)) = f(0, x, v) = f(0, \tilde{x} - \omega_c^{-1} {}^\perp \tilde{v}, \tilde{v})$$

et par conséquent la densité limite  $\tilde{f}$  est solution de (7), (8). Notons que les équations caractéristiques limites forment un système hamiltonien, en les variables conjuguées  $(\tilde{x}_2, \omega_c^{-1}\tilde{v}_1)$  et  $(\omega_c\tilde{x}_1, \tilde{v}_2)$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}_2}{dt} &= \frac{\partial\tilde{\phi}[\tilde{f}(t)]}{\partial(\omega_c\tilde{x}_1)}(\tilde{X}(t), \tilde{V}(t)), \quad \frac{d(\omega_c^{-1}\tilde{V}_1)}{dt} = \frac{\partial\tilde{\phi}[\tilde{f}(t)]}{\partial\tilde{v}_2}(\tilde{X}(t), \tilde{V}(t)) \\ \frac{d(\omega_c\tilde{X}_1)}{dt} &= -\frac{\partial\tilde{\phi}[\tilde{f}(t)]}{\partial\tilde{x}_2}(\tilde{X}(t), \tilde{V}(t)), \quad \frac{d\tilde{V}_2}{dt} = -\frac{\partial\tilde{\phi}[\tilde{f}(t)]}{\partial(\omega_c^{-1}\tilde{v}_1)}(\tilde{X}(t), \tilde{V}(t)). \end{aligned}$$

### 3. Quelques propriétés du modèle limite

Les champs de vitesse et accélération étant à divergence nulle

$$\operatorname{div}_{\tilde{x}} \mathcal{V}[\tilde{f}(t)] = -\frac{1}{\omega_c} \operatorname{div}_{\tilde{x}} {}^\perp \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)] = 0, \quad \operatorname{div}_{\tilde{v}} \mathcal{A}[\tilde{f}(t)] = \omega_c \operatorname{div}_{\tilde{v}} {}^\perp \nabla_{\tilde{v}} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)] = 0$$

l'équation (7) s'écrit aussi sous la forme conservative

$$\partial_t \tilde{f} + \operatorname{div}_{\tilde{x}} \{ \tilde{f} \mathcal{V}[\tilde{f}(t)] \} + \operatorname{div}_{\tilde{v}} \{ \tilde{f} \mathcal{A}[\tilde{f}(t)] \} = 0.$$

En particulier nous obtenons la conservation de la masse. Plus généralement, nous démontrons le résultat suivant.

**Proposition 3.1** *Soit  $\tilde{f} = \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v})$  la solution du problème (7), (8) et  $\psi = \psi(\tilde{x}, \tilde{v})$  une fonction intégrable par rapport à  $\tilde{f}(0, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} = f^{\text{in}}(\tilde{x} - \omega_c^{-1} {}^\perp \tilde{v}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x}$ .*

(i) *Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  nous avons*

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\tilde{x}, \tilde{v}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) \\ &\times \left[ \frac{1}{\omega_c} (\nabla_{\tilde{y}} \psi(\tilde{y}, \tilde{w}) - \nabla_{\tilde{x}} \psi(\tilde{x}, \tilde{v})) \cdot {}^\perp \nabla e(\tilde{x} - \tilde{y}) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| > |\tilde{v} - \tilde{w}| / |\omega_c|\}} \right. \\ &\left. + (\nabla_{\tilde{v}} \psi(\tilde{x}, \tilde{v}) - \nabla_{\tilde{w}} \psi(\tilde{y}, \tilde{w})) \cdot {}^\perp \nabla e\left(\frac{\tilde{v} - \tilde{w}}{\omega_c}\right) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| < |\tilde{v} - \tilde{w}| / |\omega_c|\}} \right] d\tilde{w} d\tilde{y} d\tilde{v} d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (18)$$

(ii) *En particulier, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  nous avons*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \{1, \tilde{x}, \tilde{v}, |\tilde{x}|^2, |\tilde{v}|^2\} \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \{1, \tilde{x}, \tilde{v}, |\tilde{x}|^2, |\tilde{v}|^2\} f^{\text{in}}(\tilde{x} - \omega_c^{-1} {}^\perp \tilde{v}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x}.$$

**Preuve.**

(i) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , nous obtenons, grâce aux formules de représentation (16), (17)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\tilde{x}, \tilde{v}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\tilde{x}, \tilde{v}) \partial_t \tilde{f} d\tilde{v} d\tilde{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \nabla_{\tilde{x}} \psi \cdot \mathcal{V}[\tilde{f}(t)] + \nabla_{\tilde{v}} \psi \cdot \mathcal{A}[\tilde{f}(t)] \right] \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} \\ &= -\frac{1}{\omega_c} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\tilde{x}} \psi(\tilde{x}, \tilde{v}) \cdot {}^\perp \nabla e(\tilde{x} - \tilde{y}) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| > |\tilde{v} - \tilde{w}| / |\omega_c|\}} \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\tilde{v}} \psi(\tilde{x}, \tilde{v}) \cdot {}^\perp \nabla e\left(\frac{\tilde{v} - \tilde{w}}{\omega_c}\right) \mathbf{1}_{\{|\tilde{x} - \tilde{y}| < |\tilde{v} - \tilde{w}| / |\omega_c|\}} \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{w} d\tilde{y} d\tilde{v} d\tilde{x}. \end{aligned}$$

La formule (18) résulte en interchangeant  $(\tilde{x}, \tilde{v})$  contre  $(\tilde{y}, \tilde{w})$ , combiné à Fubini.

- (ii) Les conservations résultent facilement, par (18) appliquée successivement aux fonctions  $1, \tilde{x}, \tilde{v}, |\tilde{x}|^2, |\tilde{v}|^2$ .



Etant donné que l'énergie cinétique est conservée, et comme on s'attend à ce que l'énergie globale soit conservée, nous devrions retrouver aussi la conservation de l'énergie électrique. Effectivement nous démontrons

**Proposition 3.2** *Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  nous avons*

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} = 0.$$

**Preuve.** L'énergie électrique s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{v} - \tilde{w}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) \tilde{f}(t, \tilde{y}, \tilde{w}) d\tilde{w} d\tilde{y} d\tilde{v} d\tilde{x}$$

et en utilisant la parité de  $\mathcal{E}(\xi, \eta)$  en les variables  $\xi$  et  $\eta$ , nous obtenons facilement, par Fubini, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) \tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{v} d\tilde{x} &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)](\tilde{x}, \tilde{v}) \partial_t \tilde{f} d\tilde{v} d\tilde{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)] \cdot \mathcal{V}[\tilde{f}(t)] + \nabla_{\tilde{v}} \tilde{\phi}[\tilde{f}(t)] \cdot \mathcal{A}[\tilde{f}(t)] \right] \tilde{f} d\tilde{v} d\tilde{x} = 0. \end{aligned}$$



## Références

- [1] M. Bostan, The Vlasov-Poisson system with strong external magnetic field. Finite Larmor radius regime, *Asymptot. Anal.*, 61(2009) 91-123.
- [2] M. Bostan, Transport equations with disparate advection fields. Application to the gyrokinetic models in plasma physics, *J. Differential Equations* 249(2010) 1620-1663.
- [3] M. Bostan, Gyro-kinetic Vlasov equation in three dimensional setting. Second order approximation, *SIAM J. Multiscale Model. Simul.* 8(2010) 1923-1957.
- [4] M. Bostan, A. Finot, M. Hauray, The effective Vlasov-Poisson system for the finite Larmor radius regime, en préparation.
- [5] E. Frénod, E. Sonnendrücker, Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with strong external magnetic field, *Asymptotic Anal.* 18(1998) 193-213.
- [6] E. Frénod, E. Sonnendrücker, The finite Larmor radius approximation, *SIAM J. Math. Anal.* 32(2001) 1227-1247.
- [7] D. Han-Kwan, Effect of the polarization drift in a strongly magnetized plasma, *ESAIM : Math. Model. Numer. Anal.* 46(2012) 1929-947.